Экономический журнал ВШЭ. 2016. Т. 20. № 1. С. 156–174.
HSE Economic Journal, 2016, vol. 20, no 1, pp. 156–174.

Динамическое хеджирование с учетом степени неприятия риска

Лакшина В.В.

В статье сравниваются две многомерные модели волатильности GO-GARCH и cop-GARCH в контексте задачи расчета динамического коэффициента хеджирования для портфеля, состоящего из двух активов. Зачастую данная задача решается в предположении, что инвесторы полностью отвергают риск. Тогда оптимальный коэффициент хеджирования равен отношению ковариации хеджируемого и хеджирующего активов к дисперсии последнего. Естественно предположить, что коэффициент также должен зависеть от отношения инвестора к риску. В данной работе это достигается путем максимизации функции ожидаемой полезности инвестора, зависящей от доходности портфеля и его дисперсии. В результате при, например, восходящем тренде на рынке коэффициент хеджирования меньше, чем в предположении об абсолютном отвержении риска инвестором, и наоборот. В статье оценены параметры восьми портфелей, состоящих из высоколиквидных акций и фьючерсов российских компаний. Условные ковариации и дисперсии доходности хеджированного портфеля оценены с помощью обозначенных моделей волатильности. В распределении остатков моделей волатильности присутствуют дополнительные параметры, в том числе скошенности, в силу наличия эффектов асимметрии в распределении финансовых временных рядов [Kroner, Ng, 1998]. Эффективность хеджирования оценена с помощью показателей максимально достижимого снижения риска, безусловной дисперсии хеджированного портфеля и общего финансового результата для прогнозного периода. Показано, что для шести рассмотренных портфелей cop-GARCH превосходит GO-GARCH в эффективности хеджирования. Включение в функцию полезности инвестора степени неприятия риска и применение вышеуказанных моделей волатильности в совокупности позволили добиться эффективности хеджирования от 24 до 65%.

Автор признателен участникам секции «Анализ финансовых рынков, банков и страхования, качество прогнозирования валютных курсов» X Международной научной конференции «Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества» и дискуссанту секции «Финансовая математика» XVI Апрельской международной научной конференции «Модернизация экономики и общества» В.А. Лапшину за ценные комментарии и полезные замечания, полученные во время выступлений.

Лакшина Валерия Владимировна – магистр экономики, старший преподаватель кафедры математической экономики, НИУ ВШЭ. E-mail: vlakshina@hse.ru

Статья поступила: 01.07.2015/Статья принята: 23.12.2015.

Ключевые слова: динамический коэффициент хеджирования; акция; фьючерс; многомерные модели волатильности; коэффициент неприятия риска; эффективность хеджирования; копула; ожидаемая полезность.

1. Введение

Выделяют четыре подхода к нахождению оптимального коэффициента хеджирования (далее КХ): компромисс между средним значением доходности и дисперсией, максимизация ожидаемой полезности инвестора, минимизация среднего обобщенного коэффициента Джини и минимизация обобщенной полудисперсии (*semivariance*), подробнее см. в работе [Chen et al., 2003]. Первый подход включает в себя минимизацию дисперсии портфеля и максимизацию коэффициента Шарпа. Если совместное распределение доходностей активов в портфеле нормальное и цена фьючерса представляет собой чистый мартингал, то все упомянутые способы вычисления коэффициента хеджирования дают эквивалентные результаты [Chen et al., 2003].

Минимизация дисперсии портфеля – самый простой и часто встречающийся на практике способ расчета КХ. Но еще авторы работы [Cecchetti et al., 1988] отмечают две основные проблемы, возникающие в рамках данного подхода: во-первых, данный способ предполагает, что инвесторы полностью отвергают риск[1]; во-вторых, полученный КХ не зависит от времени[2]. Перечисленные проблемы решаются путем введения в функцию полезности инвестора коэффициента неприятия риска и расчета динамического КХ. Вычисление последнего основано на условных дисперсиях и ковариациях активов, входящих в портфель, и, как следствие, требует выбора модели для расчета упомянутых дисперсий и ковариаций. Подобный выбор можно осуществить, сравнивая эффективность полученных в рамках той или иной модели стратегий хеджирования с помощью таких показателей, как максимально достижимое снижение риска, безусловная дисперсия хеджированного портфеля и суммарный финансовый результат.

В настоящей статье на основании вышеприведенных критериев сравниваются не рассмотренные ранее в литературе по данной тематике модели обобщенной ортогональной GARCH (GO-GARCH) [Van der Weide, 2002] и GARCH с копулой (cop-GARCH) [Breymann et al., 2003]. При этом при вычислении оптимального КХ учитывается неприятие риска.

Кроме этого, как показано в приложении к работе [Chen et al., 2003], основное внимание исследователи уделяют хеджированию сырьевых товаров и валюты, либо исследование проводится для доходностей рыночного индекса. При этом существует значительно меньшее число работ, посвященных хеджированию акций. Данная статья стремится восполнить этот пробел, рассматривая стратегии хеджирования для акций восьми российских компаний, перечисленных в табл. 1.

В существующей литературе по расчету динамического КХ рассмотрены такие модели условных ковариаций, как BEKK, модели постоянных (CCC) и динамических (DCC) условных корреляций [Chang et al., 2011], DCC с реализованной волатильностью [Hung, 2015], векторной авторегрессии с асимметричной условной гетероскедастичностью

[1] Примерами исследований, использующих эту предпосылку, служат работы [Ederington, 1979; Myers, 1991; Baillie, Myers, 1991; Brooks et al., 2002].

[2] В настоящее время статический КХ практически не используется.

VARMA-AGARCH [Chang et al., 2013], асимметричной DCC [Асатуров, Теплова, 2014; Колоколов, 2002]. Следует отметить, что в этих работах оптимальный КХ рассчитан без учета неприятия риска. При этом существует ряд работ, в которых неприятие риска учтено. Примерами служат [Lee, 2009], где для оценки условных ковариаций использована марковская переключающаяся обобщенная ортогональная GARCH, [Yang, Lai, 2009], где применена модель BEKK с дополнительным слагаемым вида GJR, [Glosten et al., 1993; Lypny, Powalla, 1998] с применением BEKK.

Предложены и другие способы расчета динамического КХ. Например, в исследовании [Miffre, 2004] динамический КХ рассчитан методом наименьших квадратов с использованием скользящего окна. Эффективность в данном случае не превышает 20%. Также существуют примеры расчета параметров совместной плотности распределения с использованием скользящего окна и копул. Показано, что применение негауссовских копул (в том числе копулы Стьюдента) позволяет снизить дисперсию портфеля и увеличить суммарную доходность портфеля [Пеникас, 2011].

В работе [Асатуров, Теплова, 2014] оценены динамические КХ для портфелей, состоящих из высоколиквидных акций и фьючерсов на эту акцию. При расчетах применены модели ADCC для волатильности портфеля с GJR-GARCH для волатильности входящих в него активов. Авторы показали, что динамический КХ позволяет существенно снизить риск хеджированного портфеля по сравнению с постоянным КХ. Кроме этого, авторы установили, что асимметрия отсутствует в условной корреляции доходности портфеля, но является значимой в динамике волатильности каждого актива портфеля. Расчеты производились для трех высоколиквидных акций российского фондового рынка в период с 2008 по 2013 гг., исключая кризис 2008 г. Одной из предпосылок оцененных моделей было нормальное распределение случайной составляющей.

В противоположность этому авторы многих работ, например, [Brooks et al., 2002; Chuang et al., 2015; Liu, 2014], отмечают, что асимметричные распределения, такие как скошенное распределение Стьюдента, обобщенное гиперболическое распределение и скошенное нормальное распределение, с большим успехом моделируют динамику финансовых временных рядов и, как следствие, позволяют построить более эффективную стратегию хеджирования. Данный результат был учтен в настоящей работе путем использования распределений, учитывающих асимметрию, для регрессионных остатков.

Статья построена следующим образом: в разделе 2 описана методология исследования, включая расчет КХ с учетом неприятия риска и временной динамики, сравнение моделей волатильности по их предсказательной способности и расчет показателей эффективности хеджирования. Раздел 3 посвящен эмпирическим результатам: оценены и интерпретированы коэффициенты моделей волатильности, проведено сравнение их предсказательной способности, оценена степень неприятия риска и эффективность стратегии хеджирования, основанная на полученных оценках. В заключении сделаны выводы о применимости выбранных спецификаций моделей волатильности для расчета КХ для акций российского фондового рынка.

2. Методология исследования

Суть хеджирования заключается в уменьшении колебаний стоимости портфеля инвестора путем открытия противоположной позиции по хеджирующему инструменту, обычно фьючерсу. При построении стратегии хеджирования возникает вопрос, какое количество фьючерсов включить в портфель. Это показывает КХ, равный отношению стоимости хеджируемого актива к стоимости хеджирующего актива. При этом доходность портфеля r_t равна

$$r_t = r_{S,t} - hr_t \cdot r_{F,t}, \tag{1}$$

где $r_{S,t}$ – доходность хеджируемого актива (акции); $r_{F,t}$ – доходность хеджирующего актива (фьючерса); hr_t – динамический КХ.

2.1. Расчет коэффициента хеджирования с учетом неприятия риска

В данной работе стратегия хеджирования построена с учетом степени неприятия риска путем максимизации ожидаемой полезности инвестора (2).

Соответствующая функция полезности подробно рассмотрена в статье [Wahab, 1995]. Примерами применения данной функции полезности для задачи нахождения оптимального КХ являются работы [Yang, Allen, 2005; Pok, Poshakwale, 2009; Yang, Lai, 2009]. Статьи анализируют дневные доходности индексов: AOI[3] в первом случае, KLSE[4] – во втором, S&P500, DJIA и другие популярные индексы – в третьем. Показано, что применение динамического хеджирования с использованием различных моделей волатильности позволяет добиться лучших результатов по сравнению со статическим хеджированием, основанным на МНК-регрессии. При этом авторы статьи [Pok, Poshakwale, 2009] отмечают, что учет коэффициента неприятия риска не дает существенных различий со стратегией минимизации дисперсии портфеля для данных малазийского рынка.

В работе [Chuang et al., 2015] в квадратичную функцию полезности добавлено ограничение на максимальный убыток инвестора, заданный с помощью VaR. Показано, что такая функция полезности позволяет достичь 40-процентной эффективности[5] применительно к хеджированию индексов китайской, гонконгской и тайваньской бирж.

Также существуют примеры успешного применения других функций полезности, например, степенной [Bos et al., 2000], экспоненциальной [Wood, Khosravanian, 2015].

$$EU\left(r_t \middle| \Omega_{t-1}\right) = E\left(r_t\right) - \tau \frac{V(r_t)}{2}, \tag{2}$$

где $EU\left(r_t \middle| \Omega_{t-1}\right)$ – ожидаемая полезность инвестора на информационном множестве Ω_{t-1}; τ – параметр, моделирующий относительное неприятие риска (если $\tau > 0$, то инвестор отвергает риск); $E\left(r_t\right)$ – ожидаемая доходность портфеля; $V(r_t)$ – дисперсия доходности портфеля. С учетом параметра неприятия риска оптимальный КХ равен

[3] AOI – сокращенное название индекса Австралийской биржи.
[4] KLSE – сокращенное название индекса Малазийской биржи.
[5] Формулу расчета эффективности см. в уравнении (16).

(3) $$hr_t^* = \frac{\operatorname{cov}\left(r_{S,t}, r_{F,t}\right)}{V\left(r_{F,t}\right)} - \frac{E\left(r_{F,t}\right)}{2\tau V\left(r_{F,t}\right)}.$$

Если $\tau \to \infty$, то hr_t^* совпадает с оптимальным КХ, полученным при минимизации дисперсии портфеля.

Возникает необходимость определить параметр неприятия к риску τ. В данной работе используется агрегированная мера риска, оценка которой предложена в статье [Cotter, Hanly, 2010] и применена в статье [Cotter, Hanly, 2012]. Там же оценка данного параметра производится с помощью модели ARMA(p,q) – GARCH-M($\tilde{p},\tilde{q}$) [Engle et al., 1987], где зависимой переменной является доходность фондового индекса (4).

(4) $$\begin{gathered} r_{I,t} = \psi_0 + \sum_{i=1}^{p} \psi_i r_{I,t-i} + \sum_{j=1}^{q} \varphi_j \eta_{t-j} + \tau\sigma_t^2 + \eta_t, \\ \eta_t = \sigma_t^2 \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim iidF(\theta), \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{\tilde{p}} \kappa_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{\tilde{q}} \mu_j \sigma_{t-j}^2, \end{gathered}$$

где $r_{I,t}$ – доходность индекса; $\psi_0, \psi_i, \varphi_j,\ i = 1 \ldots p,\ j = 1 \ldots q$ – параметры ARMA(p,q); $\omega, \kappa_i, \mu_j,\ i = 1 \ldots \tilde{p},\ j = 1 \ldots \tilde{q}$ – параметры GARCH-M($\tilde{p},\tilde{q}$); ε_t – остатки модели, независимые одинаково распределенные по $F(\theta)$; θ – параметры распределения; τ – искомая степень неприятия риска.

2.2. Расчет динамического коэффициента хеджирования

Зависящий во времени оптимальный КХ hr_t^* можно оценить как минимум двумя способами: метод скользящего окна для постоянного КХ и условные ковариации и вариации соответствующих доходностей, оцененные с помощью многомерных моделей волатильности. Основным недостатком первого метода является гомоскедастичность случайного слагаемого, что не наблюдается в случае финансовых временных рядов [Chen et al., 2003]. Многомерные модели волатильности, напротив, позволяют учесть как гетероскедастичность остатков, так и эмпирические факты финансовых временных рядов.

В настоящем исследовании для оценки динамического КХ выбраны две модели волатильности, еще не рассмотренные в соответствующей литературе: модель обобщенной условной авторегрессионной гетероскедастичности с копулой (cop-GARCH) [Breymann et al., 2003] и модель обобщенной ортогональной GARCH (GO-GARCH) [Van der Weide, 2002]. Рассмотрим эти модели подробнее.

Пусть имеется n временных рядов доходностей финансовых активов длины T:

(5) $$x_t = \left(x_{1t}, \ldots, x_{nt}\right)',\ t = 1, \ldots, T.$$

Наблюдаемые доходности x_t можно представить как сумму их условного математического ожидания $\mathbb{E}(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ и n-мерного случайного процесса y_t с нулевым математическим ожиданием и безусловной дисперсией σ_y^2:

(6) $$x_t = \mathbb{E}(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) + y_t, \quad y_t \sim iid\left(0, \sigma_y^2\right).$$

Условной ковариацией процесса y_t называется матрица $\Sigma_t = \mathbb{E}\left(y_t y_t' \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$, или матрица волатильности. Модели GARCH различаются по тому, как параметризована последняя.

Для модели GO-GARCH справедливо (7).

(7) $$\Sigma_t = XV_tX',$$

где X – матрица, параметризация которой основана на сингулярном разложении безусловной дисперсии доходностей (подробности см.: [Van der Weide, 2002]); V_t – диагональная матрица, ненулевые элементы которой представляют собой оценку одномерной волатильности входящих в портфель активов и заданы любыми одномерными GARCH(p,q) процессами с параметрами $\omega, \kappa_i, \mu_j, i = 1 \ldots p, j = 1 \ldots q$. В данном исследовании выбрано гипергеометрическое распределение остатков одномерных GARCH(p,q) процессов, заданное уравнением (8).

(8) $$f\left(y; \theta_{sh}, \theta_{sk}, \lambda\right) = \frac{\theta_{sh}{}^{n/2}\left(1 - \theta_{sk}{}'\theta_{sk}\right)^{\lambda/2}}{(2\pi)^{n/2}\mathrm{K}_{\lambda}\left(\theta_{sh}\sqrt{1 - \theta_{sk}{}'\theta_{sk}}\right)} \cdot \frac{\mathrm{K}_{\lambda - n/2}\theta_{sh}\sqrt{1 + y'y}}{\left(1 + y'y\right)^{n/4 - \lambda/2}} \cdot e^{\theta_{sh}\theta_{sk}{}'y},$$

где θ_{sh} – параметр, определяющий форму распределения; θ_{sk} – параметр, определяющий скошенность распределения.

Модель cop-GARCH является обобщением модели динамических условных корреляций DCC. Матрица волатильности в cop-GARCH задается уравнением

(9) $$\Sigma_t = H_t R_t H_t,$$

где R_t – условная корреляционная матрица; H_t – диагональная матрица, в которой ненулевые элементы равны условным стандартным отклонениям доходностей активов портфеля. Матрица $H_t \odot H_t$, где $\odot$ – поэлементное произведение, аналогична матрице V_t из (7). Динамика условных корреляций задана уравнениями (10) и (11).

(10) $$R_t = diag\left(q_{11,t}^{-\frac{1}{2}} \ldots q_{nn,t}^{-\frac{1}{2}}\right) Q_t diag\left(q_{11,t}^{-\frac{1}{2}} \ldots q_{nn,t}^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$Q_t = (1-\alpha-\beta-\gamma)\bar{Q} + \alpha y_{t-1} y_{t-1}^{'} + \beta Q_{t-1} + \gamma \bar{y}_{t-1} \bar{y}_{t-1'}, \quad (11)$$

где $diag(v)$ – диагональная матрица с вектором v на главной диагонали; $q_{ij,t}$ – элемент матрицы Q_t с индексами i, j; α, β, γ – скалярные параметры; $\bar{Q}$ – долгосрочная корреляционная матрица; $\bar{y}_t$ – инновации с нулевым порогом, равные y_t, если $y_t < 0$, и равные нулю в противоположном случае. Отличительной чертой cop-GARCH является возможность оценить параметры распределения y_t одновременно с параметрами матрицы волатильности. Это позволяет ускорить процесс оценивания путем применения одношаговой процедуры оценки дополнительных параметров распределения вместо двухшаговой. Копула Стьюдента $c(\boldsymbol{u}; R_t, v)$, выраженная через матрицу условных корреляций R_t, представлена в (12).

$$c(\boldsymbol{u}; R_t, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)^n \left(1+\nu^{-1}\boldsymbol{u}' R_t^{-1}\boldsymbol{u}\right)^{-(\nu+n)/2}}{|R_t|^{1/2}\left(\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)\right)^n \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\boldsymbol{u}_i^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}}, \quad (12)$$

где $\boldsymbol{u}_i = t_\nu^{-1}\left(F_v\left(y_{i,t}\right)\right)$; $t_\nu^{-1}(\cdot)$ и $F_v(\cdot)$ – обратная и кумулятивная функции распределения Стьюдента с ν степенями свободы соответственно.

2.3. Тест предсказательной способности моделей

Существует два способа сравнивать оцененные модели – по качеству подгонки и по качеству прогноза. Первый способ применим для вложенных моделей, т.е. не подходит в рассматриваемой ситуации. Более того, сравнение прогнозной силы моделей в большей степени релевантно исследуемой проблеме.

В многомерном случае для сравнения моделей по качеству прогноза используют функции потерь. В данной работе проведено попарное сравнение моделей с помощью теста Диболда – Мариано [Diebold, Mariano, 1995]. Нулевая гипотеза заключается в том, что обе модели прогнозируют одинаково хорошо, поэтому эта группа тестов носит название тестов на одинаковую предсказательную способность (*equal predictive ability, EPA*). Решающая статистика теста представлена в (13).

$$S = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / T}}, \quad (13)$$

где $\bar{d}$ – выборочное среднее ряда разностей значений функции потерь для моделей i и j,

(14) $$\bar{d} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[g\left(z_{it}, \hat{z}_{it}\right) - g\left(z_{jt}, \hat{z}_{jt}\right)\right],$$

$\hat{\sigma}^2$ – состоятельная оценка дисперсии ряда разностей значений функции потерь, в данной работе это состоятельная при наличии автокорреляции и гетероскедастичности оценка Ньюи – Веста [Newey, West, 1987]; $g\left(z_{it}, \hat{z}_{it}\right)$ – функция потерь для модели i, зависящая от моделируемой величины z_{it} и ее прогнозного значения $\hat{z}_{it}$.

Знак решающей статистики (13) имеет следующее значение: если $g\left(z_{it}, \hat{z}_{it}\right) > 0$, то $S > 0$ означает, что прогнозная сила модели *i* меньше, чем модели *j*.

Тест Диболда – Мариано универсален и подходит для очень широкого класса функций потерь, например, (15).

(15) $$g\left(\Sigma_t, \hat{\Sigma}_t\right) = tr\left(\hat{\Sigma}_t^{-1}\Sigma_t\right) - log\left|\hat{\Sigma}_t^{-1}\Sigma_t\right| - n,$$

где Σ_t – истинное значение условной ковариационной матрицы; $\hat{\Sigma}_t$ – ее прогноз; $tr(\cdot)$ – след матрицы; $|\cdot|$ – определитель матрицы. Так как Σ_t неизвестно, то в качестве нее используется $y_t y_t^{'}$ [Diebold, Mariano, 1995], см. уравнение (6).

Функция потерь (15) «налагает штраф» за недооценку прогнозной величины, т.е. волатильности. Применительно к рассматриваемой задаче именно недооценка волатильности приводит к негативным последствиям, что и обуславливает выбор данной функции потерь.

2.4. Показатели эффективности

Основным и наиболее распространенным показателем эффективности хеджирования является максимально достижимое снижение риска:

(16) $$E = \frac{V(r_{S,t}) - V(r_t)}{V(r_{S,t})},$$

где $V(r_{S,t})$ – дисперсия доходности акции (т.е. нехеджированной позиции); $V(r_t)$ – дисперсия доходности хеджированного портфеля.

Кроме этого, стратегии хеджирования сравниваются с помощью дисперсии доходностей хеджированного портфеля или финансового результата, который рассчитывается как сумма логарифмических доходностей портфеля за прогнозный период [Пеникас, 2011].

Альтернативными мерами эффективности хеджирования служат относительная эффективность хеджирования [Charnes et al., 2003], прирост полезности инвестора [Haigh, Holt, 2000], минимальный требуемый размер капитала [Brooks et al., 2002].

3. Эмпирические результаты

Для исследования взяты восемь акций российских компаний, торгующихся одновременно на РТС и РТС FORTS. В дальнейшем для краткости вместо названий компаний будут использованы тикеры акций (табл. 1).

Таблица 1.

Тикеры акций рассматриваемых компаний

Тикер	Название	Тикер	Название
GAZP	Газпром	SBER	Сбербанк
GMKN	Норильский никель	SNGS	Сургутнефтегаз
LKOH	Лукойл	TRNF	Транснефть
ROSN	Роснефть	VTBR	Банк ВТБ

Рассматриваемый период – с 1 января 2007 г. по 1 октября 2014 г. В качестве дневной цены использовалась цена закрытия, как для акции, так и для фьючерса[6]. Источником данных является сайт инвестиционной компании «Финам» [Финам, 2015].

Описательная статистика для логарифмических доходностей акций представлена в табл. П1 Приложения.

3.1. Оценка параметров модели и сравнение предсказательной способности

Для расчета динамического коэффициента хеджирования в данной работе оценены следующие модели волатильности: GO-GARCH с обобщенным гипергеометрическим распределением остатков (см. (8)) и cop-GARCH с копулой Стьюдента. Средняя доходность моделируется с помощью ARMA. Подбор количества лагов производится путем минимизации информационного критерия Шварца, согласно которому выбраны следующие спецификации: ARMA(1,0) – GO-GARCH(1,1), ARMA(1,0) – cop-GARCH(1,1). Значения критерия Шварца, нормированные на количество наблюдений, представлены в табл. П2 Приложения. В целях экономии пространства в работе приведены оценки параметров для матриц волатильности портфеля GMKN. В табл. 2 приведены оценки параметров и их p-значения.

В обеих моделях GARCH и ARCH эффекты значимы. В модели GO-GARCH параметр скошенности θ_{sk} оказался незначимым, как и параметр формы распределения θ_{sh}. При этом параметр λ значим на однопроцентном уровне, откуда следует, что остатки распределены по Стьюденту с $3,463/2 \approx 2$ степенями свободы для акций и $3,666/2 \approx 2$ степенями свободы для фьючерсов [Schmidt et al., 2006].

[6] Поскольку в предоставленных данных указана цена одного лота для фьючерсов, то эта цена была скорректирована на размер лота, чтобы цены акций и фьючерсов представляли собой числа одного порядка.

В модели cop-GARCH количество степеней свободы также значимо на однопроцентном уровне и равно 6,555, что больше суммы степеней свободы распределения Стьюдента для GO-GARCH. Действительно, в GO-GARCH плотность вероятности каждого актива моделируется отдельно, в то время как в cop-GARCH оценивается совместное распределение обоих активов, и хвосты маржинальных плотностей вероятности оказались тяжелее хвостов совместной плотности. Незначимый параметр γ свидетельствует об отсутствии эффектов асимметрии в условной корреляции совместного распределения акций и фьючерсов GMKN, что созвучно выводам в работе [Асатуров, Теплова, 2014].

Таблица 2.

Оценки параметров матриц волатильности для GMKN

	Портфель GMKN			
	GO-GARCH		cop-GARCH	
	коэффициент	p-значение	коэффициент	p-значение
	Акции			
ω	0,011	0,002	0,000	0,037
κ_1	0,268	0,000	0,118	0,000
μ_1	0,731	0,000	0,862	0,000
θ_{sk}	–0,455	0,611		
θ_{sh}	0,250	0,618		
λ	–3,463	0,000		
	Фьючерсы			
ω	0,011	0,052	0,000	0,028
κ_1	0,103	0,000	0,115	0,000
μ_1	0,886	0,000	0,865	0,000
θ_{sk}	0,487	0,419		
θ_{sh}	0,250	0,487		
λ	–3,666	0,000		
	Совместное распределение			
α			0,039	0,000
β			0,959	0,000
γ			0,000	1,000
ν			6,555	0,000
LL	6768,86		6793,99	
BIC	–10,47		–10,50	

Для остальных портфелей наблюдается схожая картина, за исключением портфеля TRNF, где параметр λ незначим на 10-процентном уровне, θ_{sk} и θ_{sh} значимы на 5-процентном уровне и равны –0,104 и 0,856 соответственно. Перейдем теперь к сравнению моделей.

Значения решающей статистики (13) и ее p-значения представлены в табл. 3. Обозначение «cop-GO» показывает, что модель *i* в (14) – это модель cop-GARCH.

Таблица 3.

Статистика теста Диболда – Мариано и ее p-значения

	GAZP	GMKN	LKOH	ROSN	SBER	SNGS	TRNF	VTBR
cop-GO	–4,516	–6,921	–4,976	0,835	–4,762	–6,266	–5,566	–1,980
p-значение	0,000	0,000	0,000	0,202	0,000	0,000	0,000	0,024

Статистика теста Диболда – Мариано значима на 5-процентном уровне для всех акций, кроме портфеля ROSN, при этом прогнозная сила модели cop-GARCH превосходит таковую для GO-GARCH. Для ROSN гипотеза об одинаковой предсказательной способности моделей не отвергается.

3.2. Расчет коэффициентов хеджирования и эффективность

Оптимальные КХ рассчитываются согласно (3) для прогнозных значений трех вышеупомянутых моделей волатильности. В качестве прогнозного периода выбрана последняя треть выборки, куда вошло от 598 до 643 наблюдений.

Для оценки степени неприятия риска по уравнениям (4) в работе взят индекс ММВБ (MICEX). По критерию Шварца выбрана модель ARMA(1,0)-GARCH-M(1,0) со скошенным распределением Стьюдента для остатков. Результаты оценки представлены в табл. 4.

Таблица 4.

Оценка параметра неприятия риска для российского фондового рынка

	ψ_0	ψ_1	τ	ω	κ_1	θ_{sk}	θ_{sh}
Коэффициент	–0,002	–0,042	6,253	0,000	0,504	0,987	3,390
p-значение	0,001	0,095	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

В табл. 4 ψ_0, ψ_1 – параметры ARMA-модели; $\omega, \kappa_1, \theta_{sk}, \theta_{sh}$ аналогичны параметрам в табл. 2; τ – искомый параметр неприятия риска. Для российского фондового рынка он составляет 6,253 и является значимым на однопроцентном уровне[7]. Дальнейшие вычисления оптимального КХ произведены для данного значения τ.

[7] Для сравнения: Коттер, Хенли [Cotter, Hanly, 2012] оценили данный параметр как 2,52 для американского индекса нефтегазовой отрасли промышленности за период с ноября 1993 г. по

Средние значения оптимальных КХ представлены в табл. П3 Приложения. В большинстве случаев среднее значение, рассчитанное по GO-GARCH, превышает среднее значение для cop-GARCH. Для обеих моделей средние значения изменяются в диапазоне от 44 до 90%.

В табл. 5 представлены дисперсия доходностей хеджированных портфелей и показатель эффективности (16). Для удобства восприятия все значения умножены на 100, т.е. эффективность показана в процентах.

Таблица 5.

Дисперсия доходностей хеджированного портфеля и эффективность

	GAZP	GMKN	LKOH	ROSN	SBER	SNGS	TRNF	VTBR
				GO-GARCH				
Дисперсия	0,051	0,050	0,059	0,051	0,051	0,069	0,054	0,114
Эффективность E	58,16	63,86	–29,23	64,88	9,72	–58,89	49,52	13,62
				cop-GARCH				
Дисперсия	0,057	0,057	0,050	0,118	0,115	0,051	0,044	0,086
Эффективность E	59,47	39,65	40,56	51,73	51,65	23,86	50,54	51,23

Согласно табл. 5, безусловная дисперсия доходностей незначительно отличается у разных моделей, за исключением случаев SBER, ROSN и VTBR, при этом меньшая дисперсия, оцененная по GO-GARCH, наблюдается у портфелей GAZP, GAZP, ROSN, SBER. Cop-GARCH во всех случаях дает положительную эффективность хеджирования, изменяющуюся в пределах от 24 до 59%. Разброс значений эффективности GO-GARCH значительно выше – от –59 до 65%. Для портфелей SNGS и LKOH дисперсия хеджированного портфеля оказалась больше дисперсии нехеджированной позиции. Модель cop-GARCH оказалась эффективнее, чем GO-GARCH, для портфелей GAZP, LKOH, SBER, SNGS, TRNF, VTBR.

Табл. 6 содержит финансовые результаты стратегий хеджирования, основанных на оценках модели cop-GARCH, GO-GARCH. В последней строке рассчитан финансовый результат для нехеджированной позиции. Согласно данному критерию, GO-GARCH существенно снизила убытки портфелей GAZP, ROSN и обеспечила дополнительную прибыль для портфеля VTBR. При этом GO-GARCH оказалась убыточной для LKOH, SBER, SNGS и TRNF. Cop-GARCH имеет преимущества перед GO-GARCH для случая SNGS, для портфелей LKOH, SBER позволяет получить меньшие убытки, чем GO-GARCH. Для GMKN финансовый результат GO-GARCH ниже, чем для нехеджированной позиции, но существенно выше, чем убыточный результат cop-GARCH.

ноябрь 2009 г. Более подробное сравнение затруднено ввиду того, что авторы производили оценку на месячных данных.

Таблица 6.

Финансовый результат за прогнозный период

	GAZP	GMKN	LKOH	ROSN	SBER	SNGS	TRNF	VTBR
cop-GARCH	–0,316	–0,294	–0,620	–0,388	–0,943	–0,330	–0,246	0,742
GO-GARCH	–0,193	0,100	–0,719	–0,236	–1,345	–0,627	–0,039	1,322
Нехеджированная позиция	–0,395	0,196	0,232	–0,269	0,545	–0,395	0,196	0,232

4. Заключение

В данной статье рассматривается построение стратегии хеджирования, основанной на максимизации ожидаемой полезности инвестора с учетом неприятия риска. Коэффициент хеджирования зависит от времени и рассчитывается с помощью многомерных моделей волатильности GO-GARCH с обобщенным гипергеометрическим распределением остатков и cop-GARCH с копулой Стьюдента. Расчет производится для восьми портфелей, состоящих из акций и фьючерсов восьми российских компаний.

Новизна данной работы заключается в том, что оптимальный КХ учитывает степень неприятия риска инвестором, оцененную по данным российского фондового рынка. Оценка производится по методу, описанному в работе [Cotter, Hanly, 2010], с применением одномерной модели волатильности GARCH-M со скошенным распределением Стьюдента для остатков. С учетом неприятия риска среднее значение оптимального КХ лежит в пределах от 44 до 90%.

Эффективность хеджирования рассчитывается с помощью показателя максимально достижимого снижения риска в процентах [Ederington, 1979]. Согласно этому показателю, GO-GARCH является эффективнее, чем cop-GARCH, только для портфелей GMKN и ROSN, при этом эффективность лучшей модели составляет от 24 до 65%.

Сравнение предсказательной способности тестом Диболда – Мариано показало, что cop-GARCH превосходит GO-GARCH в большинстве случаев, за исключением ROSN.

Выбранные в данной статье спецификации моделей волатильности позволяют оценить также параметры формы и скошенности распределений доходностей активов портфеля и доходности портфеля. В GO-GARCH для портфелей GAZP, GMKN, LKOH, SNGS параметры формы и скошенности распределения незначимы, соответственно остатки распределены по Стьюденту [Schmidt et al., 2006]. Для остальных портфелей значимы параметры формы в распределении остатков. В cop-GARCH количество степеней свободы в распределении Стьюдента значимо для всех портфелей. Значимость дополнительных параметров распределений остатков согласуется с выводами, полученными в [Liu, 2014], о важности этих параметров в задаче нахождения оптимального КХ.

Данное исследование показало, что для семи портфелей из восьми рассмотренных модель cop-GARCH с распределением Стьюдента для остатков превосходит GO-GARCH по предсказательной способности; в половине случаев cop-GARCH обеспечивает меньшую безусловную дисперсию портфеля и в трех случаях – меньшие убытки, чем GO-GARCH; во всех восьми случаях cop-GARCH демонстрирует положительную эффективность хеджирования и для шести портфелей превосходит GO-GARCH по этому показателю.

Одними из возможных направлений дальнейшей работы являются расчет динамического КХ с зависящей от времени степенью неприятия риска, дезагрегация степени неприятия риска и включение в нее гетерогенности по инвесторам, построение стратегий хеджирования с большим числом активов и другими хеджирующими инструментами.

Приложение.

Таблица П1.

Описательная статистика дневных доходностей акций

	GAZP	GMKN	LKOH	ROSN	SBER	SNGS	TRNF	VTBR
N	1927	1927	1927	1930	1925	1927	1803	1793
Min	–0,2236	–0,3590	–0,2202	–0,2745	–0,2588	–0,2235	–0,2750	–0,3461
1stQ	–0,0118	–0,0121	–0,0104	–0,0113	–0,0131	–0,0119	–0,0127	–0,0135
Mean	–0,0004	0,0003	0,0000	0,0000	–0,0001	–0,0002	0,0004	–0,0007
Median	–0,0006	0,0004	0,0000	–0,0001	–0,0001	–0,0003	0,0003	–0,0006
3rdQ	0,0114	0,0133	0,0100	0,0117	0,0133	0,0116	0,0119	0,0131
Max	0,2526	0,2164	0,2394	0,3805	0,3012	0,3739	0,3203	0,4659
Stdev	0,0263	0,0295	0,0253	0,0282	0,0316	0,0285	0,0321	0,0319
Skewn	0,0005	–1,1233	–0,0171	0,9740	0,1310	1,5529	0,0298	0,5625
Kurt	19,5542	22,3466	19,3015	34,8300	18,3878	32,4325	19,4175	42,0813

Примечание. В таблице приняты следующие обозначения: N – число наблюдений для пары временных рядов «акция – фьючерс», Min – минимальное значение, 1stQ – первый квартиль распределения, Mean – выборочное среднее, Median – медиана, 3rdQ – третий квартиль, Max – максимальное значение, St.dev – выборочное стандартное отклонение, Skewn – коэффициент асимметрии, Kurt – коэффициент эксцесса.

Таблица П2.

Информационный критерий Шварца для оцененных моделей

	GAZP	GMKN	LKOH	ROSN	SBER	SNGS	TRNF	VTBR
cop-GARCH	–11,03	–10,50	–11,04	–10,60	–10,30	–10,53	–9,33	–10,10
GO-GARCH	–11,09	–10,47	–11,14	–10,76	–10,35	–10,58	–9,44	–10,15

Таблица П3.

Средние значения оптимального коэффициента хеджирования

GARCH	GAZP	GMKN	LKOH	ROSN	SBER	SNGS	TRNF	VTBR
cop	0,616	0,439	0,707	0,543	0,674	0,776	0,590	0,856
GO	0,875	0,707	0,818	0,797	0,793	0,759	0,707	0,900

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Асатуров К.Г., Теплова Т.В. Построение коэффициентов хеджирования для высоколиквидных акций российского рынка на основе моделей класса GARCH // Экономика и математические методы. 2014. Т. 50. № 1. С. 37–54.

Колоколов А. Хеджирование фьючерсами: многомерные GARCH с динамическими условными корреляциями // Квантиль. 2002. № 9. С. 61–75.

Пеникас Г. Модели «копула» в задачах хеджирования ценового риска // Прикладная эконометрика. 2011. Т. 2. № 22. С. 3–21.

Сайт компании «Финам» (http://finam.ru)

Baillie R.T., Myers R.J. Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge // Journal of Applied Econometrics. 1991. Vol. 6. № 2. P. 109–124.

Bos C.S., Mahieu R.J., Van Dijk H.K. Daily Exchange Rate Behaviour and Hedging of Currency Risk // Journal of Applied Econometrics. 2000. Vol. 15. № 6. P. 671–696.

Breymann W., Dias A., Embrechts P. Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance // Quantitative Finance. 2003. № 3. P. 1–14.

Brooks C., Henry O.T., Persand G. The Effect of Asymmetries on Optimal Hedge Ratios // The Journal of Business. 2002. Vol. 75. № 2. P. 333–352.

Cecchetti S.G., Cumby R.E., Figlewski S. Estimation of the Optimal Futures Hedge // The Review of Economics and Statistics. 1988. № 4. P. 623–630.

Chang C.-L., González-Serrano L., Jimenez-Martin J.-A. Currency Hedging Strategies Using Dynamic Multivariate GARCH // Mathematics and Computers in Simulation. 2013. № 94. P. 164–182.

Chang C.-L., McAleer M., Tansuchat R. Crude Oil Hedging Strategies Using Dynamic Multivariate GARCH // Energy Economics. 2011. № 33. P. 912–923.

Charnes J.M., Koch P., Berkman H. Measuring Hedge Effectiveness for FAS 133 Compliance // Journal of Applied Corporate Finance. 2003. Vol. 15. № 4. P. 95–103.

Chen S.S., Lee C., Shrestha K. Futures Hedge Ratios: A Review // The Quarterly Review of Economics and Finance. 2003. Vol. 43. № 3. P. 433–465.

Chuang C.C., Wang Y.H., Yeh T.J., Chuang S.L. Hedging Effectiveness of the Hedged Portfolio: The Expected Utility Maximization Subject to the Value-at-risk Approach // Applied Economics. 2015. Vol. 47. № 20. P. 2040–2052.

Cotter J., Hanly J. A Utility Based Approach to Energy Hedging // Energy Economics. 2012. Vol. 34. № 3. P. 817–827.

Cotter J., Hanly J. Time-varying Risk Aversion: An Application to Energy Hedging // Energy Economics. 2010. Vol. 32. № 2. P. 432–441.

Diebold F.X., Mariano R.S. Comparing Predictive Accuracy // Journal of Business & Economic Statistics. 1995. № 13. P. 253–263.

Ederington L.H. The Hedging Performance of the New Futures Markets // The Journal of Finance. 1979. Vol. 34. № 1. P. 157–170.

Engle R.F., Lilien D.M., Robins R.P. Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model // Econometrica: Journal of the Econometric Society. 1987. Vol. 55. № 2. P. 391–407.

Glosten L.R, Jagannathan R., Runkle D.E. Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks // The Journal of Finance. 1993. Vol. 48. № 5. P. 1779–1801.

Haigh M.S., Holt M.T. Hedging Multiple Price Uncertainty in International Grain Trade // American Journal of Agricultural Economics. 2000. Vol. 82. № 4. P. 881–896.

Hung J.C. Evaluation of Realized Multi-power Variations in Minimum Variance Hedging // Economic Modelling. 2015. № 51. P. 672–679.

Kroner K., Ng V. Modeling Asymmetric Movements of Asset Prices // Review of Financial Studies. 1998. Vol. 11. № 4. P. 817–844.

Lee H.T. Optimal Futures Hedging under Jump Switching Dynamics // Journal of Empirical Finance. 2009. Vol. 16. № 3. P. 446–456.

Liu W.H. Optimal Hedge Ratio Estimation and Hedge Effectiveness with Multivariate Skew Distributions // Applied Economics. 2014. Vol. 46. № 12. P. 1420–1435.

Lypny G., Powalla M. The Hedging Effectiveness of DAX Futures // The European Journal of Finance. 1998. Vol. 4. № 4. P. 345–355.

Miffre J. Conditional OLS Minimum Variance Hedge Ratios // Journal of Futures Markets. 2004. Vol. 24. № 10. P. 945–964.

Myers R.J. Estimating Time-varying Optimal Hedge Ratios on Futures Markets // Journal of Futures Markets. 1991. Vol. 11. № 1. P. 39–53.

Newey W., West K. A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix // Econometrica. 1987. Vol. 55. № 3. P. 703–708.

Pok W.C., Poshakwale S.S., Ford J.L. Stock Index Futures Hedging in the Emerging Malaysian Market // Global Finance Journal. 2009. Vol. 20. № 3. P. 273–288.

Schmidt R., Hrycej T., Stützle E. Multivariate Distribution Models with Generalized Hyperbolic Margins // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. Vol. 50. № 8. P. 2065–2096.

Van der Weide R. GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model // Journal of Applied Econometrics. 2002. Vol. 17. № 5. P. 549–564.

Wahab M. Conditional Dynamics and Optimal Spreading in the Precious Metals Futures Markets // Journal of Futures Markets. 1995. Vol. 15. № 2. P. 131–166.

Wood D.A., Khosravanian R. Exponential Utility Functions aid Upstream Decision Making // Journal of Natural Gas Science and Engineering. 2015 (in press).

Yang M.J., Lai Y.C. An Out-of-sample Comparative Analysis of Hedging Performance of Stock Index Futures: Dynamic Versus Static Hedging // Applied Financial Economics. 2009. Vol. 19. № 13. P. 1059–1072.

Yang W., Allen D.E. Multivariate GARCH Hedge Ratios and Hedging Effectiveness in Australian Futures Markets // Accounting & Finance. 2005. Vol. 45. № 2. P. 301–321.

Dynamic Hedging Considering the Degree of Risk Aversion

Lakshina Valeriya

National Research University Higher School of Economics,
25/12, B. Pecherskaya str., Nizhny Novgorod, 603155, Russian Federation.
E-mail: vlakshina@hse.ru

This paper studies the problem of calculation the dynamic hedge ratio for the portfolio consisted of two assets. Commonly it's solved assuming that the investor's risk aversion is infinite. Then the optimal hedge coefficient is equal to ratio of covariance of the hedged and hedging assets to the variance of the latter. It's natural to assume that the optimal hedge ratio also depends on the investor's attitude to risk. In this paper this fact is implemented via maximization of the investor's expected utility, which depends on the portfolio return and variance. Consequently if, for example, prices move upwards, the optimal hedge ratio is less than under the assumption of absolute risk aversion and vice versa. In the paper eight portfolios, consisted of Russian blue-chip stocks and futures, are estimated. Multivariate volatility models GO-GARCH and cop-GARCH are applied to estimate the conditional covariances and variances of hedged portfolio returns. There are additional parameters in the error term distribution, including skewness parameter, due to the existence of asymmetry effects in the financial assets returns' distribution [Kroner, Ng, 1998]. The hedge effectiveness is estimated on the out-of-sample period using the maximum attainable risk reduction, unconditional variance of hedged portfolio returns and financial result. It's shown that in six cases cop-GARCH surpasses GO-GARCH in hedge. Including the degree of risk aversion in the investor's utility function together with above-mentioned volatility models allows to obtain hedge effectiveness from 24 to 65%.

Key words: dynamic hedge ratio; stock; futures; multivariate volatility models; risk aversion; hedge effectiveness; copula; expected utility.

JEL Classification: C01, C51, C58, G17.

* *
*

References

Asaturov K.G., Teplova T.V. (2014) Postroyeniye koeffitsiyentov khedzhirovaniya dlya vysokolikvidnykh aktsiy rossiyskogo rynka na osnove modeley klassa GARCH [Constructing Hedging Coefficients for Highly Liquid Stocks of the Russian Market on the Basis of GARCH Models]. *Economics and Mathematical Methods*, 50, 1, pp. 37–54.

Kolokolov A. (2002) Khedzhirovaniye f'yuchersami: mnogomernyye GARCH s dinamicheskimi uslovnymi korrelyatsiyami [Futures Hedging: Multivariate GARCH with Dynamic Conditional Correlations]. *Kvantil'*, 9, pp. 61–75.

Penikas G. (2011) Modeli «kopula» v zadachakh khedzhirovaniya tsenovogo riska [Copula-Based Price Risk Hedging Models]. *Applied Econometrics*, 2, 22, pp. 3–21.

Sayt kompanii «Finam» [«Finam» web-site]. Available at: http://finam.ru

Baillie R.T., Myers R.J. (1991) Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge. *Journal of Applied Econometrics*, 6, 2, pp. 109–124.

Bos C.S., Mahieu R.J., Van Dijk H.K. (2000) Daily Exchange Rate Behaviour and Hedging of Currency Risk. *Journal of Applied Econometrics*, 15, 6, pp. 671–696.

Breymann W., Dias A., Embrechts P. (2003) Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance. *Quantitative Finance*, 3, pp. 1–14.

Brooks C., Henry O.T., Persand G. (2002) The Effect of Asymmetries on Optimal Hedge Ratios. *The Journal of Business*, 75, 2, pp. 333–352.

Cecchetti S.G., Cumby R.E., Figlewski S. (1988) Estimation of the Optimal Futures Hedge. *The Review of Economics and Statistics*, 4, pp. 623–630.

Chang C.-L., González-Serrano L., Jimenez-Martin J.-A. (2013) Currency Hedging Strategies Using Dynamic Multivariate GARCH. *Mathematics and Computers in Simulation*, 94, pp. 164–182.

Chang C.-L., McAleer M., Tansuchat R. (2011) Crude Oil Hedging Strategies Using Dynamic Multivariate GARCH. *Energy Economics*, 33, pp. 912–923.

Charnes J.M., Koch P., Berkman H. (2003) Measuring Hedge Effectiveness for FAS 133 Compliance. *Journal of Applied Corporate Finance*, 15, 4, pp. 95–103.

Chen S.S., Lee C., Shrestha K. (2003) Futures Hedge Ratios: A Review. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 43, 3, pp. 433–465.

Chuang C.C., Wang Y.H., Yeh T.J., Chuang S.L. (2015) Hedging Effectiveness of the Hedged Portfolio: The Expected Utility Maximization Subject to the Value-at-risk Approach. *Applied Economics*, 47, 20, pp. 2040–2052.

Cotter J., Hanly J. (2012) A Utility Based Approach to Energy Hedging. *Energy Economics*, 34, 3, pp. 817–827.

Cotter J., Hanly J. (2010) Time-varying Risk Aversion: An Application to Energy Hedging. *Energy Economics*, 32, 2, pp. 432–441.

Diebold F.X., Mariano R.S. (1995) Comparing Predictive Accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13, pp. 253–263.

Ederington L.H. (1979) The Hedging Performance of the New Futures Markets. *The Journal of Finance*, 34, 1, pp. 157–170.

Engle R.F., Lilien D.M., Robins R.P. (1987) Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 55, 2, pp. 391–407.

Glosten L.R, Jagannathan R., Runkle D.E. (1993) Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *The Journal of Finance*, 48, 5, pp. 1779–1801.

Haigh M.S., Holt M.T. (2000) Hedging Multiple Price Uncertainty in International Grain Trade. *American Journal of Agricultural Economics*, 82, 4, pp. 881–896.

Hung J.C. (2015) Evaluation of Realized Multi-power Variations in Minimum Variance Hedging. *Economic Modelling*, 51, pp. 672–679.

Kroner K., Ng V. (1998) Modeling Asymmetric Movements of Asset Prices. *Review of Financial Studies*, 11, 4, pp. 817–844.

Lee H.T. (2009) Optimal Futures Hedging under Jump Switching Dynamics. Journal *of Empirical Finance*, 16, 3,pp. 446–456.

Liu W.H. (2014) Optimal Hedge Ratio Estimation and Hedge Effectiveness with Multivariate Skew Distributions. *Applied Economics*, 46, 12, pp. 1420–1435.

Lypny G., Powalla M. (1998) The Hedging Effectiveness of DAX Futures. *The European Journal of Finance*, 4, 4, pp. 345–355.

Miffre J. (2004) Conditional OLS Minimum Variance Hedge Ratios. *Journal of Futures Markets*, 24, 10, pp. 945–964.

Myers R.J. (1991) Estimating Time-varying Optimal Hedge Ratios on Futures Markets. *Journal of Futures Markets*, 11, 1, pp. 39–53.

Newey W., West K. (1987) A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55, 3, pp. 703–708.

Pok W.C., Poshakwale S.S., Ford J.L. (2009) Stock Index Futures Hedging in the Emerging Malaysian Market. *Global Finance Journal*, 20, 3, pp. 273–288.

Schmidt R., Hrycej T., Stützle E. (2006) Multivariate Distribution Models with Generalized Hyperbolic Margins. *Computational Statistics and Data Analysis*, 50, 8, pp. 2065–2096.

Van der Weide R. (2002) GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model. *Journal of Applied Econometrics*, 17, 5, pp. 549–564.

Wahab M. (1995) Conditional Dynamics and Optimal Spreading in the Precious Metals Futures Markets. *Journal of Futures Markets*, 15, 2, pp. 131–166.

Wood D.A., Khosravanian R. (2015) Exponential Utility Functions aid Upstream Decision Making. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. (In press).

Yang M.J., Lai Y.C. (2009) An Out-of-sample Comparative Analysis of Hedging Performance of Stock Index Futures: Dynamic Versus Static Hedging. *Applied Financial Economics*, 19, 13, pp. 1059–1072.

Yang W., Allen D.E. (2005) Multivariate GARCH Hedge Ratios and Hedging Effectiveness in Australian Futures Markets. *Accounting & Finance*, 45, 2, pp. 301–321.